FUNDAŢIA DE EVALUARE ÎN EDUCAŢIE
browse on web: www.evaluareineducatie.ro
EVALUĂRI NAŢIONALE CONTINUE ÎN EDUCAŢIE
Desfăşurate în parteneriat MECI şi sub egida Academiei Române
Protocol M.E.C.I. nr. 46359/ 07.12.2007 (Matematică)
Protocol M.E.C.I. nr. 27829/ 05.03.2008 (Lb. Română, Lb. Engleză, Lb. Germană, Informatică, Fizică)

EVALUARE ÎN EDUCAŢIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAŢIONALĂ – 13.06.2009

Numele şi Prenumele	
Şcoala	

CLASA a XI-a, M1

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $x_0>0$ şi $(x_{n+1}-x_n)\sqrt{x_n}=1+x_n-x_{n+1}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{\ 3}}{n^2}$.

2. Se consideră o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de două ori derivabilă şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=f(x)f''(x)$. Să se demonstreze că dacă funcţia g nu se anulează, atunci g este o funcţie cu valori pozitive.

3. Fie $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{C})$ şi $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \dots & b_n\end{pmatrix}\in M_{1,n}(\mathbb{C})$. Să se arate că $\det(I_n+AB)=1+a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$.

4. Fie $A_n=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\left(\sin\dfrac{\pi pq}{n+1}\right)_{p,q\in\{1,2,\dots,n\}}$ două matrice pătratice de ordin n cu elemente reale, cu $n\geq 3$.

a) Să se arate că $\det A_n=n+1$.

b) Să se arate că $\det(A_nB)=\left(4^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sin^2\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)\det(B)$.

c) Admiţând că matricea B este inversabilă, să se demonstreze identitatea $\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{2(n+1)}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n}$.