LUCRARE SCRISĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XI-a A NR. I

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$.

   a) (0,5 p) Să se determine numărul de inversiuni şi signatura permutării σ.

   b) (0,5 p) Să se rezolve ecuaţia $x^2 = \sigma, x \in S_4$.

   c) (0,5 p) Să se rezolve ecuaţia $x \cdot \sigma^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, x \in S_4$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + a \cdot A, a \in \mathbf{R}$.

   a) (0,5 p) Să se calculeze $A^2 - 9A$.

   b) (0,5 p) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât determinantul matricei $X(a)$ să fie egal cu 10.

   c) (0,5 p) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 9ab), \forall a, b \in \mathbf{R}$.

3. (1 p) Rezolvaţi ecuaţiile a) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & x \\ 5 & x & 5 \\ x & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ -x & x-3 \end{vmatrix} = 6$.

4. (2 p) Calculaţi limitele următoarelor şiruri:

   a) $x_n = \dfrac{4n+5}{\sqrt{n^2+5n-7}}$ b) $x_n = n - \sqrt{n^2+2n}$

   c) $x_n = \dfrac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots (n+1)(n+2)}{3n^3+5}$ d) $x_n = \left(\dfrac{n^2+n}{n^2-n} \right)^{n+5}$

5. (1,5 p) Aflaţi numerele reale *a* şi *b* astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{9n^2+bn+4} - an \right) = \dfrac{-1}{2}$

6. (1,5 p) Calculaţi determinantul $\begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon & \varepsilon^2 \\ -\varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & -\varepsilon \end{vmatrix}$ ştiind că ε este o rădăcină a ecuaţiei: $x^2 + x + 1 = 0$.

LUCRARE SCRISĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XI-a A **NR. II**

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$.

   a) (0,5 p) Să se determine numărul de inversiuni şi signatura permutării σ.

   b) (0,5 p) Să se rezolve ecuaţia $x^2 = \sigma, x \in S_4$.

   c) (0,5 p) Să se rezolve ecuaţia $x \cdot \sigma^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, x \in S_4$.

2. În mulţimea $M_2(R)$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + a A$, unde $a \in R$.

   a) (0,5 p) Să se calculeze $A^2 - 8A$;

   a) (0,5 p) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât determinantul matricei $X(a)$ să fie egal cu 17.

   b) (0,5 p) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+8ab)$.

3. (1 p) Rezolvaţi ecuaţiile a) $\begin{vmatrix} x & 4 & 4 \\ 4 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x+5 & -3 \\ -x & x-5 \end{vmatrix} = 3$.

4. (2 p) Calculaţi limitele următoarelor şiruri:

   a) $x_n = \dfrac{\sqrt{9n^2 + 2n + 1}}{-3n + 5}$ b) $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

   c) $x_n = \dfrac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + (n+2)(n+3)}{2n^3 + 3}$ d) $x_n = \left(\dfrac{n^2 - 3}{n^2 + 3} \right)^{n+3}$

5. (1,5 p) Aflaţi numerele reale a şi b astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 - an + 1} - bn) = \dfrac{1}{2}$.

6. (1,5 p) Fie $a, b, c, m \in \mathbf{Z}$. Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} a^2 + m & ab & ac \\ ab & b^2 + m & bc \\ ac & bc & c^2 + m \end{vmatrix}$ este divizibil cu m^2.