MATRICE. FIȘĂ DE LUCRU, CLASA A XI-A

1. Rezolvați ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$; $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculați sumele $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$; $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^k$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. a) Arătați că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$; b) Arătați că $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este infinită.

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$. a) Determinați x astfel încât $A^2 = 5A$; b) Pentru $x = 2$, calculați A^{2008}.

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$. Determinați numerele naturale p și q astfel încât $A(p) \cdot A(q) = A(pq)$.

6. Se consideră matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i + j = n+1 \\ 0, & i + j \neq n+1 \end{cases}$. Calculați A^2.

7. Calculați A^n dacă: a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $(A + B)^n = A^n + B^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Determinați $A \in M_2(\mathbb{Z})$ știind că: a) $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ și $M = \{X(a) = aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 5b = 1\}$. Dacă $B, C \in M$, atunci $B \cdot C \in M$.

11. Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$. a) Arătați că $A^2 - 2A + I_2 = O_2$; b) Calculați A^{2015}.

12. Determinați A dacă: a) $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; b) $A^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A^{2010} - 2A^{2009} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.