FIȘA DE LUCRU : INDUCȚIA MATEMATICĂ

 ***Metoda inducţiei matematice***

***Fie P(n) un predicat care depinde de numărul natural n. Dacă***

* P(0) este adevărată,
* Dacă pentru un număr k∈N , P(k) este adevărată ,atunci şi P(k+1) este adevărată;

atunci P(n) este adevărată pentru orice n∈N.

Astfel,demonstraţia prin metoda inducţiei matematice a unei afirmaţii P(n) , $n\geq n\_{0}$,

constă în parcurgerea următoarelor două etape:

1. Etapa verificării (verificăm dacă afirmaţia $P(n\_{0})$este adevărată);
2. Etapa demonstraţiei(presupunem că afirmaţia este adevărată pentru

$un k\geq n\_{0 , }k\in N$ ;atunci demonstrăm că şi afirmaţia P(k+1) este adevărată).

 ***Exemple uzuale rezolvate***

**Problema 1( o egalitate )**. Să se demonstreze că

$1^{2}$+$3^{2}$+$5^{2}$+………+$(2n-1)^{2}$=$\frac{n(4n^{2}-1)}{3}, ∀n\in N^{\*}$.

Soluţie. Notăm această afirmaţie cu P(n) , $n\in N^{\*}$

1. Pentru n=1 ,avem $"1^{2}=\frac{1∙(4∙1^{2}-1)}{3}"$ propoziţie adevărată.
2. Presupunem că P(k) este adevărată, k arbitrar, k>1

P(k): $1^{2}+3^{2}+5^{2}+…+\left(2k-1\right)^{2}=\frac{k\left(4k^{2}-1\right)}{3};$

$\left[1^{2}+3^{2}+…(2k-1)^{2}\right]+\left[2\left(k+1\right)-1\right]^{2}=\frac{k(4k^{2}-1)}{3}+(2k+1)^{2}=\frac{4k^{3}+12k^{2}+11k+3}{3}$;

$iar 4k^{3}+12k^{2}+11k+3=\left(k+1\right)\left(4k^{2}+8k+3\right)=\left(k+1\right)[4\left(k+1\right)^{2}-1]$

Deci, P(k+1) este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, P(n) este adevărată ,$∀ n\in N^{\*}$

**Problema 2(o inegalitate)** . Să se demonstreze că

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+…+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24},∀n\in N,n\geq 2$ .

Soluţie.Notând cu P(n) inegalitatea de demonstrat,parcurgem cele două etape:

1. Pentru n=2,P(2)$:"\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{13}{24}",\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$
2. Presupunem că P(k) este adevărată(ipoteza inductivă).

 $P\left(k\right):\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+…+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24} P\left(k+1\right):\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+…+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}$

În partea stângă a inegalităţii P(k+1) apar toţi termenii sumei din ipoteza P(k) fără $\frac{1}{k+1}$;

Adunând acest termen în ambii membri ,obţinem:

$$\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+…+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{k+1}$$

Deci e suficient să demonstrăm că $\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{k+1}\leftrightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2\left(k+1\right)}\leftrightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k+2}adev.$

**Problema 3 (divizibilitate).** Să se demonstreze că $n^{3}+11n se divide cu 6,∀n\in N$

Soluţie. $P\left(n\right):(n^{3}+11n)\vdots 6,n\in N$

1. Dacă n=0, P(0):”0⋮6”,afirmaţie adevărată;
2. Presupunem că$\left(k^{3}+11k\right)\vdots 6,k\in N ; $Vom demonstra:$\left[(k+1)^{3}+11(k+1)\right]\vdots 6$

Din ipoteza inductivă rezultă că există m∈N astfel încât $k^{3}+11k=6m$

Atunci $\left(k+1\right)^{3}+11\left(k+1\right)=k^{3}+3k^{2}+14k+12=k^{3}+11k+3k^{2}+3k+12= =6m+12+3∙k∙\left(k+1\right),dar k∙\left(k+1\right)=2a,a\in N$

Concluzie$ 6m\vdots 6,12\vdots 6,3k\left(k+1\right)\vdots 6$ deci şi suma lor este divizibilă cu 6 q.e.d.